SEPUTAR IDEAL DARI GELANGGANG POLINOM MIRING

Afriani, Amir Kamal Amir dan Nur Erawaty

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
thalabiu@gmail.com

AROUND IDEAL OF THE SKEW POLYNOMIAL RING

Afriani, Amir Kamal Amir and Nur Erawaty

Mathematics Department
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Hasanuddin University (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
thalabiu@gmail.com

Abstrak

Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel tak diketahui x adalah gelanggang $R[x;\sigma,\delta]$={$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ $|a_i \in R$} dengan aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a_i \in R$ dimana σ suatu endomorfisma di R, dan δ adalah suatu σ-derivatif. Untuk $\sigma = 1$ atau σ adalah endomorfisma identitas, gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ ditulis $R[x;\delta]$. Selanjutnya untuk $\delta = 0$ gelanggang polinom miring ditulis $R[x;\sigma]$. Operasi perkalian gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ tentu saja mempengaruhi bentuk ideal. Dalam tulisan ini akan di uraikan tentang bentuk-bentuk dan sifat ideal dari gelanggang tersebut.
.

Kata Kunci : *Gelanggang polinom miring, ideal gelanggang polinom miring.*

Abstract

The skew polynomial ring over R in an determinate x, is a ring $R[x;\sigma,\delta]$= {$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ $|a_i \in R$} with multiplication rule $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ for all $a_i \in R$, where σ be an endomorphism of R and be a left σ-derivation. For $\sigma = 1$ or σ adalah endomorphism identity, The skew polynomial ring $R[x;\sigma,\delta]$ written as $R[x;\delta]$. Then for $\delta = 0$ The skew polynomial ring $R[x;\sigma,\delta]$ written as $R[x;\sigma]$. The skew polynomial ring multiplication operations tilted involving σ and δ, certainly affect to form of ideals. In this paper will describe the forms and ideal nature of the ring.

Keywords : *skew polynomial ring, ideals of skew polynomial ring.*

PENDAHULUAN

Aljabar abstrak merupakan suatu cabang ilmu alam bidang matematika yang ciri khasnya sarat dengan aksioma-aksioma, di mana sering dianggap sebagai subyek yang ideal dalam mengerjakan atau menyelesaikan suatu pembuktian. Aljabar abstrak diawali dengan konsep dasar tentang grup yang dikenal dengan teori grup. Struktur grup menjadi dasar struktur aljabar lain seperti gelanggang. Akibatnya, semua sifat dan semua teorema dalam grup berlaku dalam gelanggang. Himpunan polinomial di $R[x]$ dapat membentuk suatu gelanggang yang kemudian disebut gelanggang polinomial $R[x]$. Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel tak diketahui x adalah gelanggang $R[x\colon\sigma,\delta]$ yang terdiri dari polinom seperti $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, yang memenuhi aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, untuk setiap $a \in R$. Adapun sifat perkalian gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ sangat mempengaruhi ideal dari gelanggang tersebut. Hal ini juga yang menyebabkan ideal dari gelanggang R belum tentu merupakan ideal dari gelanggang polinom miring $R[x:\sigma,\delta]$sehingga struktur dan ideal gelanggang polinom miring berbeda dengan struktur ideal dari gelanggang polinom biasa

Untuk pembahasan yang lebih lanjut, dibutuhkan beberapa defenisi. Oleh karena itu, sebelum memasuki pembahasan mengenai hal tersebut di atas, pada bagian ini disajikan lebih dahulu defenisi-defenisi pendukung yang akan dipakai dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi 1.1
Suatu gelanggang *(R,+,.)* adalah suatu himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan *(+)* dan perkalian *(.)* pada *R* yang memenuhi aksioma – aksioma berikut :

1. *(R,+)* merupakan grup komutatif.
2. *(R,.)* merupakan semigrup.
3. Distributif kiri dan kanan perkalian *(.)* terhadap penjumlahan *(+)*. Misalkan $a,b,c \in R$, maka $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$ dan $(a + b).c = (a.c) + (b.c)$. **[2]**

Definisi 1.2
Misalkan R suatu gelanggang, endomorfisma gelanggang adalah homomorfisma pada R yang memetakan gelanggang R ke dirinya sendiri. **[5]**

Definisi 1.3

Misalkan R suatu gelanggang, automorfisma gelanggang adalah isomorfisma gelanggang pada R yang memetakan gelanggang R ke dirinya sendiri. Jadi automorfisma gelanggang juga dikatakan suatu endomorfisma gelanggang yang bersifat bijektif . **[5]**

Definisi 1.4
Misalkan R adalah suatu gelanggang. Gelanggang tak kosong $I \subseteq R$ disebut ideal jika berlaku untuk setiap $r \in R$, $x \in I$ berlaku $rx \in I$ dan $xr \in I$. **[3]**

Definisi 1.5
Misalkan R gelanggang. Suatu polinom $f(x)$ dengan koefisien di R dan indeterminate x adalah jumlahan tak hingga

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
$$= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n .$$

Dengan $a_i \in R$, $a_i = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai *i*. a_i dinamakan koefisien dari $f(x)$. Max $\{i|\, a_i \neq 0\}$ dinamakan derajat dari $f(x)$ dan disimbolkan dengan $\delta(f(x))$. jika $a_i = 0$ untuk semua i , maka $\delta(f(x))$ tidak terdefinisikan. **[4]**

MASALAH DAN PEMBAHASAN

Masalah yang akan dibahas dalam bagian ini adalah mengenai hal-hal yang berhubungan dengan gelanggang polinom miring khususnya ideal dari gelanggang tersebut.

Lebih jelasnya, permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah sebagai berikut:
1) Bagaimana bentuk ideal suatu gelanggang polinom miring?.
2) Bagaimana sifat-sifat dari ideal gelanggang polinom miring?.

Pada dasarnya bentuk polinomial dari suatu gelanggang polinom miring sama dengan gelanggang polinomial biasa, akan tetapi dalam gelanggang polinomial biasa, operasi biner yang terdefinisi di dalamnya adalah operasi perkalian dan penjumlahan biasa, sedangkan dalam gelanggang polinom miring, operasi biner yang terdefinisi di dalamnya mengandung σ dan δ yang mengakibatkan bentuk perkalian kedua gelanggang tersebut berbeda. Untuk pembentukan suatu gelanggang polinom miring diperlukan beberapa hal, yaitu suatu gelanggang (yang biasanya disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring), endomorfisma gelanggang (endomorfisma biasanya disimbolkan dengan σ (sigma)), dan dervatif gelanggang (derivatif biasanya disimbolkan dengan δ (delta)).

Secara lengkap pengertian gelanggang polinom miring disajikan sebagai berikut:

Definisi 2.1

Misalkan R suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di R, dan δ adalah suatu σ-derivatif , yaitu*:*

1. δ suatu endomorfisma grup di R.
2. $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ untuk setiap $a,b\in R$.

Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel x adalah gelanggang *:*

$$R[x;\sigma,\delta]=f(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

dengan $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$ untuk setiap $a\in R$.

Suatu unsur p dalam gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ mempunyai bentuk kanonik:

$$p=\sum_{i=0}^{r}a_ix^i\,,r\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\dots\},a_i\in\mathbb{R},$$
dan $i=1,2,..r$. [**1**]

Perkalian polinom-polinom dalam gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ menyebabkan gelanggang polinom miring bersifat tidak komutatif.

Contoh 2.1

Misalkan $R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Automorfisma σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma(a+b\sqrt{-5})=a-b\sqrt{-5}$, Untuk setiap $a+b\sqrt{-5}\in R$. Selanjutnya pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta\left(a+b\sqrt{-5}\right)=b$, untuk setiap $a+b\sqrt{-5}\in R$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ-derivatif. Dengan demikian, $R[x:\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring, gelanggang ini bersifat tidak komutatif. Perhatikan proses perkalian antara $f(x)=\left(4-2\sqrt{-5}\right)x$ dan $g(x)=\left(3+5\sqrt{-5}\right)x$ berikut ini.

$\boldsymbol{f(x)g(x)}=\left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)x\right]\left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)x\right]$

$=\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[x\left(3+5\sqrt{-5}\right)\right]x$

$=\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\sigma\left(3+5\sqrt{-5}\right)x+\delta(3+5\sqrt{-5})\right]x$

$=\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\left(3-5\sqrt{-5}\right)x+5\right]x$

$=\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left[\left(3-5\sqrt{-5}\right)x^2+5x\right]$

$=\left(4-2\sqrt{-5}\right)\left(3-5\sqrt{-5}\right)x^2+\left(4-2\sqrt{-5}\right)5x$

$=\left(-38-26\sqrt{-5}\right)x^2+\left(20-10\sqrt{-5}\right)x$

$\boldsymbol{g(x)f(x)}=\left[\left(3+5\sqrt{-5}\right)x\right]\left[\left(4-2\sqrt{-5}\right)x\right]$

$=\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[x\left(4-2\sqrt{-5}\right)\right]x$

$=\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[\sigma\left(4-2\sqrt{-5}\right)x+\delta(4-2\sqrt{-5})\right]x$

$=\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[\left(4+2\sqrt{-5}\right)x-2\right]x$

$=\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left[\left(4+2\sqrt{-5}\right)x^2-2x\right]$

$=\left(3+5\sqrt{-5}\right)\left(4+2\sqrt{-5}\right)x^2+\left(3+5\sqrt{-5}\right)(-2)x$

$=\left(-38+26\sqrt{-5}\right)x^2+\left(-6-10\sqrt{-5}\right)x$

Pekalian di atas menunjukkan bahwa gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang bersifat tidak komutatif karena dapat dilihat $f(x)g(x)\neq g(x)f(x)$.

Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ adalah suatu gelangang polinom miring, apabila $\sigma=1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\delta]$ atau disebut juga gelanggang operator differensial, sehingga dalam gelanggang ini berlaku perkalian $xa=ax+\delta(a)$. Untuk $\delta=0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\sigma]$ operasi perkaliannya menjadi $xa=\sigma(a)x$. Sedangkan untuk kasus $\sigma=1$ dan $\delta=0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa.

Akibat 1:

Misalkan $R[x;\delta]$ adalah gelanggang operator differensial untuk suatu $a \in R$ dan untuk suatu n bilangan bulat tak negatif, maka

$$x^n a = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n-i}(a)\, x^i.$$

Bukti:

Pembuktian dengan menggunakan induksi matematika.

Untuk $n = 1$, persamaan di atas menjadi

$$x^1 a = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \delta^{1-i}(a)\, x^i. \text{ sehingga}$$

$xa = \delta(a) + ax,$ benar.

Misalkan persamaan di atas benar untuk $n = k$,

$$x^k a = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^{k-i}(a)\, x^i, \text{ benar}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah persamaan di atas benar untuk $n = k + 1$, sehingga,

$$x^k a = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^{k-i}(a)\, x^i,$$

$$x(x^k a) = x\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^{k-i}(a)\, x^i\right)$$

$$x(x^k a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x.\delta^{k-i}(a)\, x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[x\left(\delta^{k-i}(a)\right)\right] x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\left(\delta^{k-i}(a)\right)x + \delta\left(\delta^{k-i}(a)\right)\right] x^i$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^{k-i}(a)\, x^{i+1}\right) + \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^{k+1-i}(a)\, x^i\right)$$

$$= \left(\binom{k}{0}\delta^k(a)x + \binom{k}{1}\delta^{k-1}(a)x^2 + \binom{k}{2}\delta^{k-2}(a)x^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}\delta^1(a)x^k + \binom{k}{k}\delta^{k-k}(a)x^{k+1}\right) + \left(\binom{k}{0}\delta^{k+1}(a)x^0 + \binom{k}{1}\delta^k(a)x^1 + \binom{k}{2}\delta^{k-1}(a)x^2 + \binom{k}{3}\delta^{k-2}(a)x^3 + \cdots + \binom{k}{k}\delta^1(a)x^k\right)$$

$$= \left(\binom{k+1}{0}\delta^{k+1}(a)x^0 + \binom{k+1}{1}\delta^k(a)x + \binom{k+1}{2}\delta^{k-1}(a)x^2 + \binom{k+1}{3}\delta^{k-2}(a)x^3 + \cdots + \binom{k+1}{k}\delta^1(a)x^k + \binom{k+1}{k+1}\delta^{k-k}(a)x^{k+1}\right)$$

$$x^{k+1} a = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \delta^{k+1-i}(a)\, x^i.$$

Jadi,

$$x^n a = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^{n-i}(a)\, x^i.$$

Berlaku untuk setiap n. ■

Dalam gelanggang polinom $R[x]$, ideal dari R dapat langsung dibentuk menjadi ideal di dalam $R[x]$. Adapun σ dan δ dalam operasi perkalian gelanggang polinom miring, selain menyebabkan gelanggang polinom miring bersifat tidak komutatif, keduanya juga sangat mempengaruhi ideal dari gelanggang tersebut. Hal ini menyebabkan ideal dari gelanggang R belum tentu merupakan ideal dari gelanggang polinom miring $R[x{:}\,\sigma,\delta]$.

Teorema 2.1

Diberikan suatu gelanggang $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, atau $R = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$. Didefinisikan $\sigma(a + b\sqrt{-1}) = a - b\sqrt{-1}$, $\delta(a + b\sqrt{-1}) = 0$. Dari definisi σ dan δ diperoleh gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$, berikut adalah bentuk-bentuk ideal dari $R[x;\sigma]$.

1) $I = (x^2 + p)\, R[x;\sigma]$
2) $I = (x + 1)\, R[x;\sigma] + 2R[x;\sigma]$
3) $I = (x + \sqrt{-1})\, R[x;\sigma] + 2R[x;\sigma]$
4) $I = (2x^2 + 1)\, R[x;\sigma]$

Bukti:

1) $I = (x^2 + p)\, R[x;\sigma]$ dan misalkan $r \in R$, Maka

$$\begin{aligned} Ir &= \Big((x^2+p)\big[(a_n + b_n\sqrt{-1})x^n + \cdots \\ &\quad + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big]\Big)(c + d\sqrt{-1}) \\ &= (x^2+p)(c + d\sqrt{-1})\big[(a_n + b_n\sqrt{-1})x^n \\ &\quad + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big] \\ &= (x^2+p)(c + d\sqrt{-1})\, R[x;\sigma \\ &\subseteq (x^2+p)\, R[x;\sigma] \end{aligned}$$

Sehingga $Ir \subseteq I$.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} rI &= (c + d\sqrt{-1})\Big((x^2+p)\big[(a_n + \\ &\quad b_n\sqrt{-1})x^n + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big]\Big) \\ &= \Big((c + d\sqrt{-1})x^2 \\ &\quad + (c + d\sqrt{-1})p\Big)\big[(a_n + b_n\sqrt{-1})x^n \\ &\quad + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big] \\ &= \big(x(c - d\sqrt{-1})x \\ &\quad + p(c + d\sqrt{-1})\big)\big[(a_n + b_n\sqrt{-1})x^n \\ &\quad + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big] \\ &= \big(x^2(c + d\sqrt{-1}) \\ &\quad + p(c + d\sqrt{-1})\big)\big[(a_n + b_n\sqrt{-1})x^n \\ &\quad + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big] \\ &= \Big((x^2+p)(c + d\sqrt{-1})\Big)\big[(a_n \\ &\quad + b_n\sqrt{-1})x^n + \cdots + (a_0 + b_0\sqrt{-1})\big] \\ &= (x^2+p)(c + d\sqrt{-1})\, R[x;\sigma] \\ &\subseteq (x^2+p)\, R[x;\sigma] \end{aligned}$$

Sehingga $rI \subseteq I$.

Jadi I adalah ideal karena Ir dan rI merupakan subgelanggang dari I.

Cara yang sama dapat digunakan untuk membuktikan bahwa bagian 2), 3) dan 4) adalah ideal dari $R[x;\sigma]$. ■

Definisi 2.2

Misalkan δ adalah suatu σ-derivatif pada gelanggang R. δ-ideal dari R adalah ideal I dari R sehingga $\delta(I) \subseteq I$.

Teorema 2.2

Misalkan $S = R[x;\delta]$ adalah gelanggang operator differensial, jika I adalah δ-ideal dari R, maka IS adalah ideal dari S.

Bukti:

$S = R[x;\delta]$ dan I δ-ideal dari R

$IS = a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.s_n(x)$ dimana $a_i \in I, s_i \in S$.

Misalkan $t \in IS$, berarti t dapat ditulis dalam bentuk $t = a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.s_n(x)$ dengan $a_i \in I$ dan $s_i \in S$. Misalkan, $f(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in S$

Maka

$$\begin{aligned} t.f(x) &= \big(a_1.S_1(x) + a_2.S_2(x) + \cdots + \\ &\quad a_n.S_n(x)\big)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + \\ &\quad b_mx^m) \\ &= a_1.S_1(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \\ &\quad + b_mx^m) + a_2.S_2(x)(b_0 + b_1x \\ &\quad + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + \cdots \\ &\quad + a_n.S_n(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \\ &\quad + b_mx^m) \end{aligned}$$

Karena $S_i(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in S$, maka $a_i.S_i(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in IS$ sehingga $t.f(x) \in IS$.

Selanjutnya

$$f(x).t = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)\big(a_1.S_1(x) + a_2.S_2(x) + \cdots + a_n.S_n(x)\big)$$

$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_1.S_1(x) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_2.S_2(x) + \cdots + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_n.S_n(x)$$

$$= \big(b_0.a_1.S_1(x) + b_1x.a_1.S_1(x) + b_2x^2.a_1.S_1(x) + \cdots + b_mx^m.a_1.S_1(x)\big) + \big(b_0.a_2.S_2(x) + b_1x.a_2.S_2(x) + b_2x^2.a_2.S_2(x) + \cdots + b_mx^m.a_2.S_2(x)\big) + \cdots + (b_0.a_n.S_n(x) + b_1x.a_n.S_n(x) + b_nx^2.a_n.S_n(x) + \cdots + b_mx^m.a_n.S_n(x))$$

$$= \left(b_0.a_1.S_1(x) + b_1.\big(a_1x + \delta(a_1)\big).S_1(x) + b_2x\big(a_1x + \delta(a_1)\big).S_1(x) + \cdots + b_m.\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\delta^{m-i}(a_1)x^i.S_1(x)\right) + \left(b_0.a_2.S_2(x) + b_1\big(a_2x + \delta(a_2)\big).S_2(x) + b_2x\big(a_2x + \delta(a_2)\big).S_2(x) + \cdots + b_m.\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\delta^{m-i}(a_2)x^i.S_2(x)\right) + \cdots + \left(b_0.a_n.S_n(x) + b_1\big(a_nx + \delta(a_n)\big).S_n(x) + b_2x\big(a_nx + \delta(a_n)\big).S_n(x) + \cdots + b_m.\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\delta^{m-i}(a_n)x^i.S_n(x)\right).$$

$$= a_1\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right)\left(\delta(a_1)\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{1}x^{i-1}\right) + \delta^2(a_1)\left(\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{2}x^{i-2}\right) + \cdots + \delta^m(a_1)\left(\sum_{i=m}^{m}\binom{m}{m}x^{m-m}\right)\right)S_1(x) + a_2\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right)\left(\delta(a_2)\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{1}x^{i-1}\right) + \delta^2(a_2)\left(\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{2}x^{i-2}\right) + \cdots + \delta^m(a_2)\left(\sum_{i=m}^{m}\binom{m}{m}x^{m-m}\right)\right)S_2(x) + \cdots + a_n\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right)\left(\delta(a_n)\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{1}x^{i-1}\right) + \delta^2(a_n)\left(\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{2}x^{i-2}\right) + \cdots + \delta^m(a_n)\left(\sum_{i=m}^{m}\binom{m}{m}x^{m-m}\right)\right)S_n(x).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta(a_i)\left(\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{1}x^{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{n}\delta^2(a_i)\left(\sum_{i=2}^{m}\binom{m}{2}x^{i-2}\right) + \cdots + \sum_{i=1}^{n}\delta^m(a_i)\left(\sum_{i=m}^{m}\binom{m}{m}x^{i-m}\right)\right)\sum_{i=1}^{n} S_i(x).$$

Karena $a_i \in I$ dan $\delta^i(a_i) \in I$ maka semua koefisien polinomial berada dalam I sehingga $f(x).t \in IS$.

Karena $t.f(x) \in IS$ dan $f(x).t \in IS$ maka IS adalah Ideal dari dari S. ■

Untuk ideal I yang bukan δ-ideal dari $S = R[x;\delta]$, maka IS belum tentu ideal. Berikut diberikan contoh.

Contoh 2.2:

Diberikan suatu gelanggang $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ atau $R = \{a+b(\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z}\}$, suatu gelanggang $I = 5\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ adalah gelanggang bagian dari R dan I bukan δ-ideal. Didefinisikan $\sigma(a + b\sqrt{-1}) = a + b\sqrt{-5}$, dan $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$ Maka IS bukan ideal dari S

Contoh 2.3:

Diberikan suatu gelanggang $R = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z} \}$ Misalkan $S = R[x;\delta]$ adalah gelanggang oprator differensial dan $I_m = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, dan $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, maka dengan menggunakan teorema di atas, akan diperoleh I_m merupakan δ-ideal dan $I_m S$ adalah ideal dari S.

Definisi 2.3:

Misalkan σ adalah suatu automorfisma dari gelanggang $R[x;\sigma,\delta]$, I adalah σ-ideal jika I adalah ideal murni dari R sedemikian rupa sehingga $\sigma(I) \subseteq I$.

Teorema 2.3:

Misalkan $S = R[x;\sigma]$ adalah gelanggang polinom miring atas R dengan $\delta = 0$, jika I adalah σ-ideal dari R, maka IS adalah ideal dari S.

Pembuktian teorema 2.3 dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian teorema 2.2.

Contoh 2.4:

Misalkan $R = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z} \}$, dan $I = \{ (c + d\sqrt{-5}) | c, d \in m\mathbb{Z}\}$ adalah suatu gelanggang bagian dari R, jika didefinisikan $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$ maka I adalah σ-ideal.

Contoh 2.5:

Diberikan $R = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z} \}$, misalkan suatu gelanggang polinom miring $S = R[x;\sigma]$, dengan $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$, misalkan juga

1. $I_m = \{ (a+b\sqrt{(-5)}) | a,b \in p+mZ$, dengan $p=\{0,1,\ldots,(m-1)\} \}$ untuk $m = 2,3,6$.
2. $J_m = \{(a + b\sqrt{-5}) | a \in 5m\mathbb{Z}, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.
3. $K_m = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Maka dengan menggunakan teorema 2.3 akan dapat ditunjukkan bahwa $I_m S, J_m S$ dan $K_m S$ adalah ideal dari S.

Definisi 2.4:

Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ adalah suatu gelanggang polinom miring, I adalah (σ,δ)-ideal, sedemikian sehingga $\sigma(I) \subseteq I$ dan $\delta(I) \subseteq I$.

Teorema 2.4:

Misalkan $S = R[x;\sigma,\delta]$ adalah gelanggang polinom miring dengan $\sigma \neq 1$ dan $\delta \neq 0$, jika I adalah (σ,δ)-ideal dari R, maka IS adalah ideal dari S.

Bukti:

Diketahui bahwa $S = R[x;\sigma,\delta]$ dan I adalah (σ,δ)-ideal dari R

$IS = \{a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.S_n(x) | a_i \in I, s_i \in S\}$

Misalkan $t \in IS$, artinya t dapat ditulis dalam bentuk

$t = a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.s_n(x)$ dengan $a_i \in IS$ dan $s_i \in S$, misalkan $f(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in S$

Maka

$$t.f(x) = \left(a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.s_n(x)\right)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)$$

$$= a_1.s_1(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + a_2.s_2(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + \cdots + a_n.s_n(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)$$

Karena $s_i(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in S$, maka $a_i.s_i(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \in IS$sehingga $t.f(x) \in IS$. selanjutnya,

$$f(x).t = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)\left(a_1.s_1(x) + a_2.s_2(x) + \cdots + a_n.s_n(x)\right)$$

$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_1.s_1(x) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_2.s_2(x) + \cdots + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)a_n.s_n(x)$$

$$= \left(b_0.a_1.s_1(x) + b_1[x.a_1].s_1(x) + b_2[x^2.a_1].s_1(x) + \cdots + b_m[x^m.a_1].s_1(x)\right) + \left(b_0.a_2.s_2(x) + b_1[x.a_2].s_2(x) + b_2[x^2.a_2].s_2(x) + \cdots + b_m[x^m.a_2].s_2(x)\right) + \cdots + (b_0.a_n.s_n(x) + b_1[x.a_n].s_n(x) + b_n[x^2.a_n].s_n(x) + \cdots + b_m[x^m.a_n].s_n(x))$$

Pada perkalian gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ, hasil yang diperoleh dari penjabaran xa_i, x^2a_i, x^3a_i, x^4a_i akan menunjukkan x^na_i tidak dapat ditentukan karena bentuk umum perkalian gelanggang polinom miring tidak diketahui. Meski demikian, karena I merupakan (σ,δ)-ideal dari R sedemikian sehingga $\sigma(I) \subseteq I$ dan $\delta(I) \subseteq I$ maka x^na_i juga merupakan elemen I. Sehingga $f(x).t \in I$.

Jadi, karena $t.f(x)$ dan $f(x).t$ adalah subgelanggang dari I maka dapat disimpulkan bahwa IS adalah ideal d ari S.■

Contoh 2.6:

Diberikan $R = \{\, (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z}\,\}$, misalkan suatu gelanggang polinom miring $S = R[x;\sigma,\delta]$, dengan $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$ dan $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, misalkan juga $K_m = \{\, (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. K_m adalah (σ,δ)-ideal, sedemikian sehingga $\sigma(K_m) \subseteq K_m$ dan $\delta(K_m) \subseteq K_m$. maka dari teorema 3.5 akan dapat di tunjukkan bahwa K_mS adalah ideal dari S.

Contoh 2.7:

Misalkan suatu gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$
$= \{f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \ | a_i \in R\}$

Diberikan gelanggang
$P = \{g(x) = b_1x^1 + \cdots + b_nx^n \ | b_i \in R\}$

Maka akan diperoleh

(i). Untuk $\delta \neq 0$, P bukan ideal dari $R[x;\sigma,\delta]$.
(ii). Untuk $\delta = 0$, P ideal dari $R[x;\sigma,\delta]$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulan:

1. Dalam pembentukan suatu gelanggang polinom miring diperlukan beberapa hal, yaitu suatu gelanggang (yang biasanya disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring), endomorfisma gelanggang (endomorfisma biasanya disimbolkan dengan σ (sigma)), dan dervatif gelanggang (derivatif biasanya disimbolkan dengan δ (delta)). Sehingga secara lengkap gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ didefinisikan sebagai gelanggang yang terbentuk dari gelanggang polinomial dengan variabel tak diketahui x dan mempunyai bentuk
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n .$$

Dimana koefisien a_i merupakan unsur dari gelanggang R yang merupakan gelanggang tumpuan dari $R[x;\sigma,\delta]$. Aturan perkalian gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ menyebabkan sifat perkalian gelanggang polinom miring tidak komutatif dan berbeda dengan sifat perkalian gelanggang polinom yang umumnya bersifat komutatif.

2. Salah satu bentuk ideal dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ adalah $I[x]$ dengan I adalah ideal dari R. Namun demikian, ideal I dari gelanggang R belum tentu dapat dibentuk menjadi ideal $I[x]$ dalam gelanggang polinom miring $R[x:\sigma,\delta]$.
3. Misalkan $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, atau $R = \{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \mathbb{Z}$ dan $i = \sqrt{-1}\}$. Dengan definisi $\sigma(a + b\sqrt{-1}) = a - b\sqrt{-1}$ dan $\delta(a + b\sqrt{-1}) = 0$, diperoleh gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$, berikut adalah bentuk-bentuk ideal dari $R[x;\sigma]$.
   1) $I = (x^2 + p)\, R[x;\sigma]$
   2) $I = (x + 1)\, R[x;\sigma] + 2R[x;\sigma]$
   3) $I = (x + \sqrt{-1})\, R[x;\sigma] + 2R[x;\sigma]$
   4) $I = (2x^2 + 1)\, R[x;\sigma]$
4. Misalkan $S = R[x;\sigma,\delta]$ dan I merupakan suatu ideal dari R,
   (i). Misalkan σ adalah endomorfisma identitas maka $S = R[x;\delta]$ yang merupakan gelanggang operator differensial, dan jika I adalah δ-ideal dari R, maka IS adalah ideal dari S. untuk I bukan δ-ideal, IS belum tentu ideal dari $R[x;\delta]$.
   (ii). Misalkan didefinisikan δ=0 maka $S = R[x;\sigma]$, dan jika I adalah σ-ideal dari R, maka IS adalah ideal dari S. jika I bukan σ-ideal, maka IS belum tentu ideal $R[x;\sigma]$.
   (iii). Misalkan I adalah (σ,δ)-ideal dari R. maka untuk $S = R[x;\sigma,\delta]$, IS adalah ideal dari S. Dan IS belum tentu ideal untuk I yang bukan (σ,δ)-ideal.
5. Misalkan $R = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in \mathbb{Z} \}$ dan Misalkan $S = R[x;\sigma,\delta]$ dengan $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$ dan $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, misalkan juga
   I_m ={ $(a+b\sqrt{(-5)})$ | $a,b \in p+mZ$, dengan $p=\{0,1,\dots,\ (m\text{-}1)\ \}\ \}$ untuk $m = 2,3,6$.
   $J_m = \{(a + b\sqrt{-5}) | a \in 5m\mathbb{Z}, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.
   $K_m = \{ (a + b\sqrt{-5}) | a, b \in m\mathbb{Z}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.
   Maka
   (i). Misalkan σ adalah endomorfisma identitas sehingga $S = R[x;\delta]$ yang merupakan gelanggang operator differensial maka K_mS merupakan ideal dari $S = R[x;\delta]$, karena K_m merupakan δ-ideal.
   (ii). Misalkan didefinisikan δ=0 sehingga $S = R[x;\sigma]$, maka I_mS, J_mS dan K_mS merupakan ideal dari $R[x;\sigma]$ karena I_m , J_m dan K_m merupakan σ-ideal.
   (iii). Misalkan $S = R[x;\sigma,\delta]$ gelanggang polinom miring yang $\sigma \neq 1$ dan $\delta \neq 0$ seperti yang didefinisikan di atas, maka K_mS merupakan ideal dari $R[x;\sigma,\delta]$ karena K_m merupakan (σ,δ)-ideal. Sedangkan I_mS , J_mS belum tentu ideal karena I_m , J_m merupakan σ-ideal bukan δ-ideal.

REFERENSI

[1] Amir, K.A., 2010, *Beberapa Sifat Ideal Gelanggang Polinom Miring*, Inferensi Jurnal Matematika, Devisi Jurnal Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, Makassar, Vol.1 No.1 Hal:16-20.

[2] Bhattacharya,P.B., Jain, S.K., and Nagpaul, S.R.. 1994. *Basic Abstract Algebra*, Second Edition, Cambridge University Press, New York.

[3] Fraleigh, John B., 2002, *A First Course In Abstract Algebra*, Seventh Edition, Addison Wesley Publing Company, New York.

[4] Isnarto, 2008, *Pengantar Struktur Alajabar 2,* Universitas Negeri Semarang, Semarang.

[5] Malik D. S., Mordeson John N., dan Sen M.K., 2007, *Introduction to Abstract Algebra,* Scientific Word, United States.